BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.Ф.ЭФЕНДИЕВ

Институт Прикладной Математики при БГУ

В работе рассматривается обратная задача рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с разрывными коэффициентами и периодическим потенциалом на всей оси. Исследованы основные свойства фундаментальной системы решений, изучен спектр данного оператора. Указана процедура восстановления потенциала и разрывного коэффициента с помощью решений Блоха. Дана теорема единственности решения обратной задачи.

Рассматривается уравнение Штурма-Лиувилля

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2\rho(x)y(x) \tag{1}$$

в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$ в предположении, что функция $q(x)$ имеет вид

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n e^{inx} \tag{2}$$

и удовлетворяется условие $\sum_{n=1}^{\infty}|q_n|=q<\infty$, λ - комплексное число, а функция

$$\rho(x)=\begin{cases} 1 & при \quad x\ge 0, \\ -\beta^2 & при \quad x<0. \end{cases} \tag{3}$$

Наше исследование стимулировано работой М.Г.Гасымова [1] и его учеников [2].

Работа состоит из трех частей. В первой части исследуются свойства фундаментальной системы решений уравнения (1). Во второй части исследуется спектр, а в третьей части решается обратная задача.

Основные решения и их свойства

Мы исследуем здесь удобные в дальнейшем решения основного уравнения

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2\rho(x)y(x).$$

Сначала определим решения $f_1^+(x,\lambda)$ и $f_2^+(x,\lambda)$, удовлетворяющие условиям на бесконечности

$$\lim_{\operatorname{Im} x\to\infty} f_1^+(x,\lambda)e^{-i\lambda x}=1,$$

$$\lim_{\operatorname{Im} x\to\infty} f_2^+(x,\lambda)e^{-\beta\lambda x}=1.$$

Существование этих решений можно доказать, если относительно потенциала потребовать выполнение условия $\sum_{n=1}^{\infty}|q_n|=q<\infty$. Это условие будет единственным в нашей работе и мы в дальнейшем будем считать, что оно всегда выполнено.

Теорема 1. Пусть $q(x)$ имеет вид (2), а $\rho(x)$ удовлетворяет условию (3). Тогда уравнение (1) имеет частное решение, представимое в виде

$$f_1^+(x,\lambda)=e^{i\lambda x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2\lambda}\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}e^{i\alpha x}\right),\qquad \textit{при}\ x\ge 0, \tag{4}$$

$$f_2^+(x,\lambda)=e^{\lambda\beta x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-2i\lambda\beta}\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}e^{i\alpha x}\right),\qquad \textit{при}\ x<0. \tag{5}$$

Здесь числа $V_{n\alpha}$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\alpha(\alpha-n)V_{n\alpha}+\sum_{s=n}^{\alpha-1}q_{\alpha-s}V_{ns}=0,\qquad 1\le n<\alpha, \tag{6}$$

$$\alpha\sum_{n=1}^{\alpha}V_{n\alpha}+q_\alpha=0, \tag{7}$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\alpha|V_{n\alpha}| \tag{8}$$

сходится.

Продолжив $f_1^+(x,\lambda)$ и $f_2^+(x,\lambda)$ как решение уравнения (1) на $x<0$ и $x\ge 0$, соответственно, и используя условия сопряжения

$$\begin{aligned} y(0+)&=y(0-),\\ y'(0+)&=y'(0-), \end{aligned} \tag{9}$$

можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. $f_1^+(x,\lambda)$ и $f_2^+(x,\lambda)$ можно продолжить как решение уравнения (1) на $x<0$ и $x\ge 0$, соответственно, и для них удовлетворяются соотношения

$$f_2^+(x,\lambda)=C_{11}(\lambda)f_1^+(x,\lambda)+C_{12}(\lambda)f_1^-(x,\lambda)\ \textit{при}\ x\ge 0,$$

$$f_1^+(x,\lambda)=C_{22}(\lambda)f_2^+(x,\lambda)+C_{21}(\lambda)f_2^-(x,\lambda),\qquad \textit{при}\ x<0,$$

где

$$f_{1,2}^-(x,\lambda)=f_{1,2}^+(x,-\lambda)$$

$$C_{11}(\lambda)=\frac{W[f_2^+(0,\lambda),f_1^-(0,\lambda)]}{2i\lambda},$$

$$C_{12}(\lambda)=\frac{W[f_1^+(0,\lambda),f_2^+(0,\lambda)]}{2i\lambda}$$

$$C_{22}(\lambda)=\frac{i}{\beta}C_{11}(-\lambda),\ C_{21}(\lambda)=-\frac{i}{\beta}C_{12}(\lambda). \qquad (10)$$

О спектре задачи (1)-(3)

Пусть L - оператор, порожденный операцией $\frac{1}{\rho(x)}\left\{-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right\}$ в пространстве $L_2(-\infty,+\infty,\rho(x))$.

Разделим λ плоскость на секторы

$$S_k=\{k\pi/2<\arg\lambda<(k+1)\pi/2\},k=\overline{0,3}.$$

Очевидно, что уравнение (1) имеет в полосе $|\mathrm{Im}\,\lambda|<\frac{\varepsilon}{2}$ $(|\mathrm{Re}\,\lambda|<\frac{\varepsilon}{2})$ фундаментальную систему решений $f_1^+(x,\lambda),f_1^-(x,\lambda)$ ($f_2^+(x,\lambda),f_2^-(x,\lambda)$), для которых

$$W\left[f_1^+(x,\lambda),f_1^-(x,\lambda)\right]=2i\lambda$$

$$W\left[f_2^+(x,\lambda),f_2^-(x,\lambda)\right]=2\lambda\beta.$$

Лемма 2. Оператор L не имеет действительных и чисто мнимых собственных значений, его непрерывный спектр состоит из осей $\mathrm{Re}\,\lambda=0$ и $\mathrm{Im}\,\lambda=0$, на котором могут быть спектральные особенности в точках вида $\frac{in}{2\beta},\ \frac{n}{2},\ n=\pm1,\pm2,\pm3,...$

Лемма 3. Коэффициенты $C_{12}(\lambda), C_{11}(-\lambda), C_{12}(-\lambda), C_{11}(\lambda)$ являются аналитическими функциями на секторах S_k, $k=\overline{0,3}$, соответственно, и имеет там конечное число нулей.

Лемма 4. Собственные значения оператора L совпадают с нулями функций

$$C_{12}(\lambda), C_{11}(-\lambda), C_{12}(-\lambda), C_{11}(\lambda)$$

из секторов $S_k=\{k\pi/2<\arg\lambda<(k+1)\pi/2\},k=\overline{0,3}$, соответственно.

Определение. Набор $\{\lambda_n,C_{11}(\lambda), C_{12}(\lambda)\}$ назовем спектральными данными оператора L.

Обратная задача

Постановка обратной задачи: Дан набор спектральных данных $\{\lambda_n, C_{11}(\lambda), C_{12}(\lambda)\}$ построить β и потенциал $q(x)$.

Предлагается следующий алгоритм построения потенциала $q(x)$:

1. Используя соотношение

$$\lim_{\lambda \to n/2}(n-2\lambda)\frac{C_{11}(\lambda)}{C_{12}(\lambda)} = V_{nn}.$$

находим все числа V_{nn}, $n = 1,2,\dots$.

2. Из формулы (6) получаем, что

$$V_{n,\alpha+n} = V_{nn}\sum_{m=1}^{\alpha}\frac{V_{m\alpha}}{m+n},$$

откуда определяются все числа $V_{n\alpha}$, $\alpha = 1,2.....,$ $n = 1,2,....n < \alpha$.

3.Далее, используя формулы (6)-(8), находим все числа q_n.

4. Число β определяется из равенства

$$\beta = iC_{11}(\lambda_n)C_{11}(-\lambda_n).$$

Таким образом, обратная задача имеет единственное решение и числа q_n и β конструктивно определяются по спектральным данным .

Теорема 2. Задание спектральных данных $\{\lambda_n, C_{11}(\lambda), C_{12}(\lambda)\}$ однозначно определяет β и потенциал $q(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М.Г. Спектральный анализ одного класса несамосопряженных операторов второго порядка. Функ. анал. и его прилож. 1980. Т.34,№1 .с. 14-19.
2. Гусейнов И.М., Пашаев Р.Т. Обратная задача для дифференциального уравнения второго порядка. Успехи Мат. Наук, 2002.57: 3б, с.147-148.
3. Фаддеев Л.Д. Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера. Труды матем. Инт-та им. Стеклова,1964 .т.73 ,с.314-336.
4. Белишев М.И. Обратная спектральная индефинитная задача для уравнения $-y'' + \lambda\rho(x)y = 0$ на промежутке. Функ. анализ и прилож.1987, т.21.вып.2. с.68-69
5. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла. Матем.сб.1975.т.97, вып.4.с.540-606.
6. Эфендиев Р.Ф. Обратная задача для одного класса дифференциальных операторов второго порядка». «Reports. Nat. Acad. of Scien. of Azerbaijan». 2001, № 4-6, с. 15-20.

İKİNCİ TƏRTİB KƏSİLƏN ƏMSALLI DİFERENSİAL OPERATORLAR ÜÇÜN TƏRS MƏSƏLƏ

R.F.ƏFƏNDİYEV

XÜLASƏ

İşdə кəsilən əmsallı, potensiali periodiк funкsiya olan Şturm-Liuvill operatoru üçün səpilmənin tərs məsələsinə baxılır. Fundamental həllərin əsas xassələri tədqiq edilmiş baxılan operatorun speкtri öyrənilmişdir. Blox tipli həllərin göstərişindən istifadə edərəк potensialın və кəsilən əmsalın tapılması proseduru göstərilməкlə tərs məsələnin həlli üsün yeganəliк teoremi verilmişdir..

INVERSE PROBLEM FOR SECOND ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR WITH DISCONTINUOUS

R.F.EFENDIYEV

SUMMARY

In the work we consider the inverse problem for the Sturm-Liouville operator with periodic potential and discontinues coefficients on the full axis. Main characteristics of the fundamental solutions are investigated, studying the spectrum of the operator. The algorithm is given for reconstruction of the potential and discontinues coefficient. The uniqueness theorem is obtained for the solvability of the inverse problem.